Matemáticas Especiales II

Programa

I. **Introducción**

Ecuaciones diferenciales. Definiciones básicas. Ecuaciones diferenciales lineales. Propiedades fundamentales de las ecuaciones diferenciales lineales.

II. **Ecuaciones diferenciales ordinarias**

A. **Problemas de condiciones iniciales**

1) Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Generalidades. Casos de fácil resolución: variables separables, diferenciales totales, factor integrante. Ecuación diferencial lineal de primer orden. Ecuaciones reducibles a la forma lineal. Problemas de valores iniciales. Teorema de existencia y unicidad de Picard.
2) Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Representación de una ecuación de orden n mediante un sistema de primer orden. Teorema de Picard para sistemas de primer orden. Reducción del orden de una ecuación diferencial. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden. Propiedades fundamentales. Caso homogéneo. Matriz fundamental. Caso no homogéneo. Solución general. Método de variación de parámetros. Sistemas con coeficientes constantes. Solución general en el caso diagonalizable y no diagonalizable. Método de coeficientes indeterminados.
3) Ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Propiedades fundamentales. El caso de segundo orden. Solución general del caso homogéneo. Obtención de la segunda solución. Solución general del caso no homogéneo. Método de variación de parámetros. El caso de coeficientes constantes. Solución general para orden 2 y orden n. Método de coeficientes indeterminados. Aplicaciones: amortiguamiento y resonancia.
4) Teoría de distribuciones y funciones de Green. Delta de Dirac. Propiedades básicas. Representaciones típicas. Derivadas. Función de Heaviside. Matriz de Green para sistemas lineales de 1$^{\text{er}}$ orden. Función de Green para ecuaciones lineales de orden n.

B. **Problemas de condiciones de contorno**

1) El problema de Sturm-Liouville. Definición, condiciones de contorno y carácter autoadjunto del operador. Función de Green. Reciprocidad. Autovalores y autofunciones. Problema variacional asociado y completitud. Desarrollo de la función de Green en autofunciones. Desarrollo en serie de autofunciones. Identidad de Parseval. Modos cero e invertibilidad.
2) Resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden por serie de potencias. Caso de coeficientes analíticos. Desarrollo alrededor de puntos singulares. Ecuación indicial. Operador de Sturm-Liouville con coeficiente p nulo en un extremo. Comportamiento de las soluciones.
3) Funciones especiales. Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel. Ecuación de Legendre. Ecuación asociada de Legendre. Armónicos esféricos. Función hipergeométrica.
4) Serie de Fourier. Propiedades fundamentales. Teoremas de convergencia. Forma compleja del desarrollo. Desarrollos de medio rango. Desarrollos para condiciones de contorno mixtas. Ejemplos.
5) Transformada de Fourier. Definición. Propiedades fundamentales. Ejemplos. Transformadas seno y coseno. Transformada de Fourier discreta. Transformada de Laplace.
6) Desarrollo en serie de funciones de Bessel, de polinomios de Legendre y de armónicos esféricos.

III Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

A. Conceptos generales

1) Definiciones. Clasificación de ecuaciones lineales de segundo orden. Ecuaciones elípticas, hiperbólicas y parabólicas. Simetrías. Soluciones generales. Curvas características.
2) El método de separación de variables. Consideraciones generales. Operadores de Sturm-Liouville en varias variables. Autovalores y autofunciones.

B. Ecuaciones elípticas

1) Ecuación de Laplace. Propiedades generales y ejemplos de aplicación. Condiciones de contorno. Teorema del valor máximo. Unicidad.
2) Funciones armónicas en diversas geometrías. El problema de Poisson. Armónicos rectangulares. Problema del semiplano. Armónicos rectangulares en 3 o más dimensiones. Armónicos circulares. Solución de Poisson en el disco. Armónicos esféricos. Solución de Poisson para la bola. Armónicos cilíndricos. Métodos de variable compleja para problemas bidimensionales. Transformaciones conformes.
3) Autovalores del operador de Laplace. Propiedades generales. Autovalores y autofunciones en el rectángulo, cilindro, disco y bola.
4) Ecuación de Poisson. Definición. Función de Green del laplaciano. Funciones de Green en dos, tres y n dimensiones. Método de las imágenes. Desarrollo en autofunciones para el problema de Dirichlet. Función de Green para el problema de Neumann.

C. Ecuaciones parabólicas.

1) Ecuación de difusión. Deducción y propiedades generales. Ejemplos de aplicación. Condiciones de contorno. Teorema del valor máximo. Unicidad.
2) El caso unidimensional. Difusión en una barra infinita. Función de Green. Barra semi-infinita. Condiciones de contorno homogéneas y no homogéneas. Propagación de variaciones periódicas de temperatura en un extremo. Difusión en una barra finita. Resolución por separación de variables.
3) Ecuación de difusión en dos y n dimensiones. Conceptos generales. Función de Green de la ecuación general de difusión. Desarrollo en autofunciones. Difusión en regiones rectangulares y circulares.

D. Ecuaciones hiperbólicas

1) Ecuaciones de ondas. Deducción y propiedades generales. Ejemplos. Condiciones de contorno.
2) Ondas en una dimensión. Solución para la cuerda infinita. Ecuación inhomogénea. Función de Green causal. Cuerda semi-infinita con extremo fijo y libre. Cuerda finita. Energía y condiciones de contorno. Resolución por separación de variables. Función de Green causal para la cuerda finita.
3) Ondas en dos o más dimensiones. Conceptos generales. Función de Green de la ecuación de ondas en dos y tres dimensiones.

IV. Probabilidades y estadstica

A. Probabilidades

1) Definiciones y axiomas. Interpretación y propiedades. Probabilidad condicional. Dependencia e independencia de eventos. Teorema de Bayes. Ejemplos.
2) Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Esperanza, varianza y desviación estándar. Ejemplos. Distribución binomial. Distribución de Poisson. Desigualdad de Tchebysheff.

3) Variables aleatorias continuas. Función densidad de probabilidad y función de distribución acumulativa. Esperanza y varianza. Momentos de orden superior y función generatriz. Densidad de una función de una variable aleatoria. Ejemplos. Distribución uniforme. Distribución normal. Distribución exponencial, gamma y chi cuadrado.

4) Distribución de probabilidad conjunta de varias variables aleatorias. Distribución marginal. Variables aleatorias independientes. Valores esperados, covarianza y coeficiente de correlación. Funciones de variables aleatorias. Teorema central de límite. Ley de los grandes números.

B. **Estadística**

1) Consideraciones generales. Definición de muestra aleatoria. Estimación de parámetros. Estimadores sesgados e insesgados. Estimadores eficientes. Método de máxima verosimilitud. Aplicación a poblaciones gaussianas. Estimador promedio y varianza. Intervalos de confianza. Test χ^2.

Bibliografía básica

[1] G. Duff, D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, (John Wiley & Sons)
[2] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, MIR.
[3] D.G. Zill, W.S.Wright, Differential Equations with boundary value problems, Brooks.
[4]A. Tijonov, A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR.
[5] C.G. Bollini, *Apuntes de Matemáticas Especiales II*, UNLP (inédito).
[6] C.M. Naón, R. Rossignoli, E.M. Santangelo, *Ecuaciones Diferenciales en Física*, EDULP (2014).
[7] E.A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover.
[8] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations* McGraw-Hill.
[9] J.W. Brown, R.V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill.
[10] J.L. Devore, *Probabilidad y Estadística*, Ed. Paraninfo.
[11] P.L. Meyer, *Probabilidad y Aplicaciones Estadsticas*, Addison Wesley.
[12] R.A. Maronna, *Probabilidad y Estadística Elementales*, UNLP.